1ο Μαθητικό Συνέδριο Έρευνας και Επιστήμης
Μάρτιος 2017

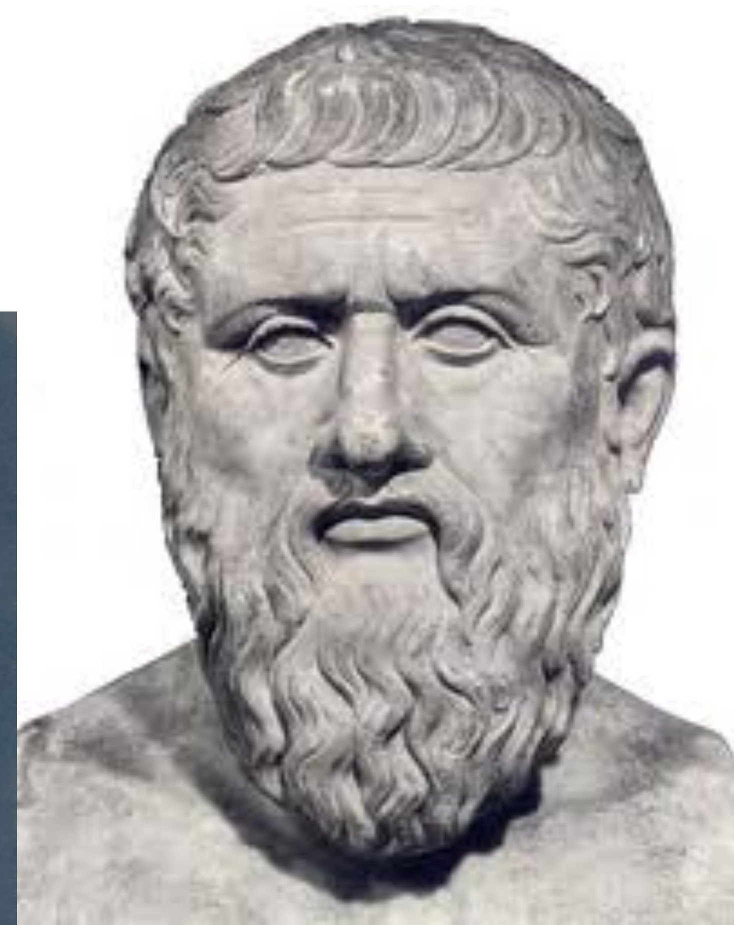
Η βεβαιότητα της μαθηματικής αλήθειας

Αναγνώστου Σαραφιανός, Γαβρίδης Δημήτριος, Μαραντίδου Χριστίνα
Επιβλέπων καθηγητής: Νίκος Τερψιάδης

Πειραματικό Λύκειο Πανεπιστημίου Μακεδονίας

Η μαθηματική επιστήμη
είναι απόλυτη.
Τα συμπεράσματά της
αποτελούν αλήθειες
αιώνιες,
οριστικές,
απόλυτες,
στατικές.

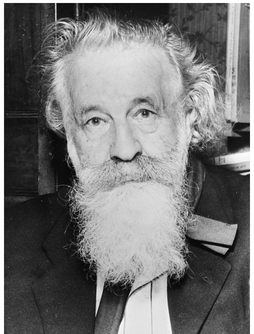
Πλάτων



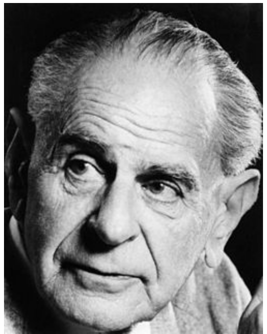
Η μαθηματική επιστήμη
είναι απόλυτη.
Τα συμπεράσματά της
αποτελούν αλήθειες
αιώνιες,
οριστικές,
απόλυτες,
στατικές.

Οι μαθηματικές αλήθειες
δεν είναι οριστικές
ούτε απόλυτες,
είναι σχετικές,
Δυναμικές
και εξελίσσονται.

Bachelard



Popper



Lakatos

Ερωτήματα σχετικά με

τη **φύση** της μαθηματικής αλήθειας

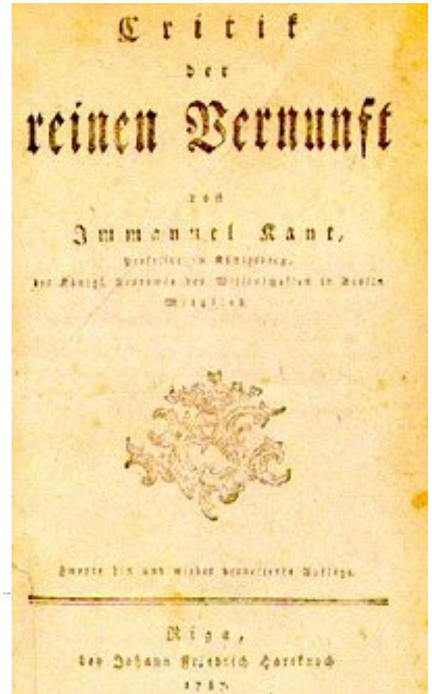
την **εγκυρότητα** των μαθηματικών προτάσεων

Το ερευνητικό ερώτημα:

Είναι οι μαθηματικές αλήθειες
οριστικές, αιώνιες, αμετάβλητες και στατικές
ή
είναι σχετικές, εξελίξιμες και δυναμικές;

Η φύση και η δομή του χώρου
και η ανθρώπινη εμπειρία:

Ο χώρος επεκτείνεται
ευθύγραμμα,
ομοιόμορφα
και απεριόριστα
προς όλες τις κατευθύνσεις.




Immanuel Kant

Ο χώρος είναι
a priori
Ευκλείδειος.


Ευκλείδης

Η επιφάνεια (2 διαστάσεων)

Ευκλείδεια γεωμετρία

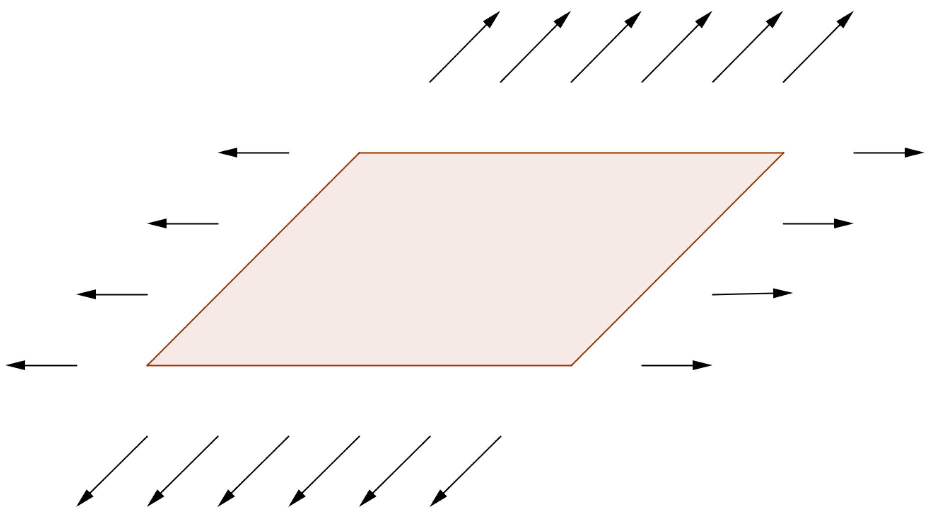
Επίπεδο

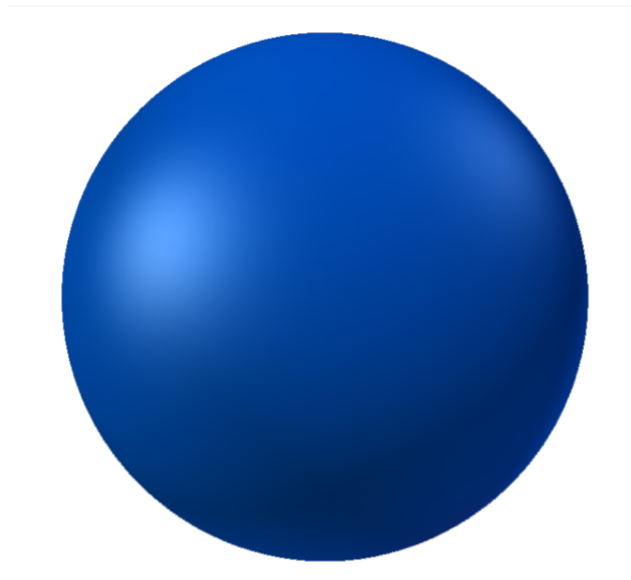
- Δεν έχει όρια
- Είναι άπειρο

Σφαιρική γεωμετρία

Επιφάνεια σφαίρας

- Δεν έχει όρια
- Είναι πεπερασμένη



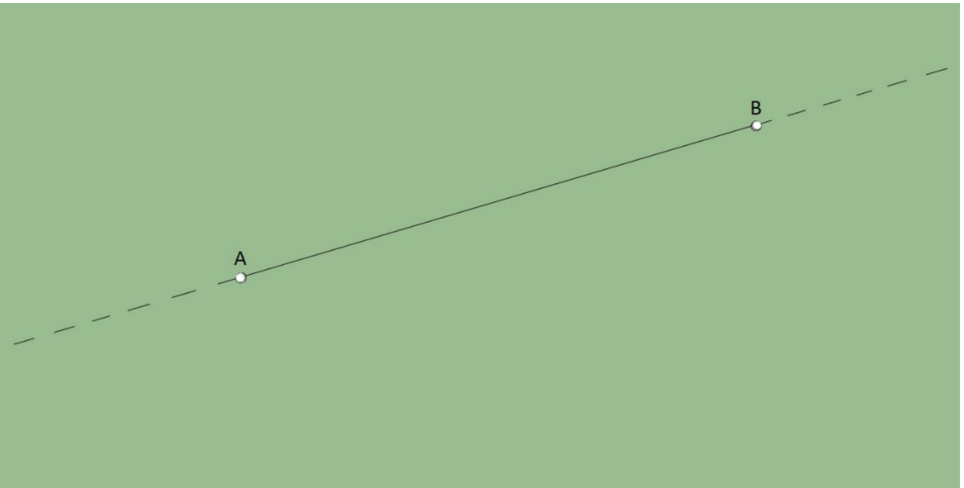


Είναι δυνατόν μία επιφάνεια να είναι πεπερασμένη αλλά ταυτόχρονα να μην έχει όρια.

Η ευθεία (η συντομότερη διαδρομή)

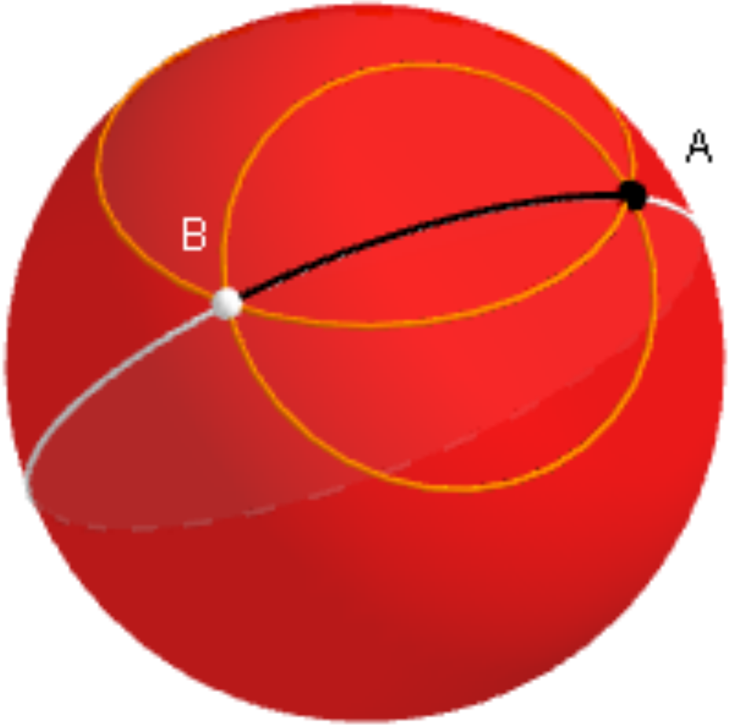
Ευκλείδεια γεωμετρία

- Η ευθεία επεκτείνεται όσο θέλουμε (είναι άπειρη).
- Δεν έχει όρια.



Σφαιρική γεωμετρία

- Η ευθεία της σφαιρικής γεωμετρίας είναι ένας μέγιστος κύκλος.
- Δεν επεκτείνεται όσο θέλουμε (είναι πεπερασμένη).
- Δεν έχει όρια.



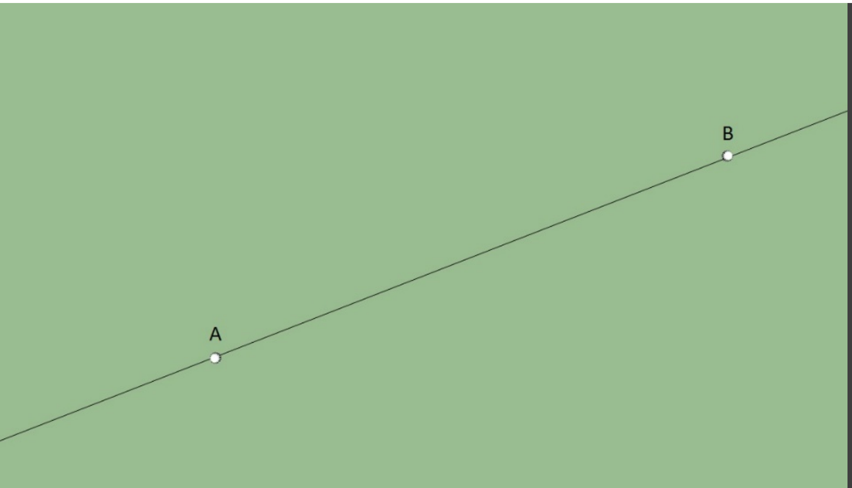
1ο Αξίωμα

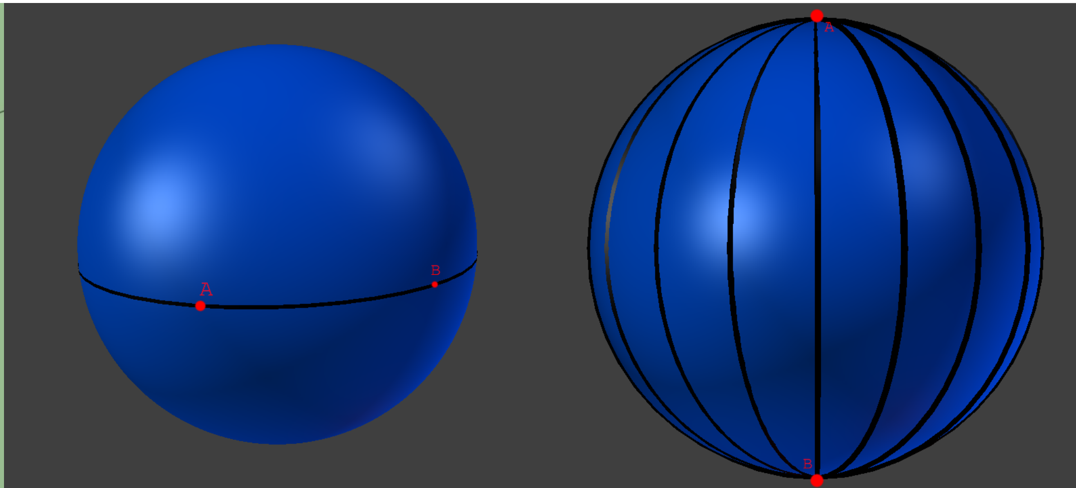
Ευκλείδεια Γεωμετρία

Από κάθε σημείο μπορούμε να φέρουμε μία ευθεία που να το συνδέει με οποιοδήποτε σημείο. Δηλαδή από δύο σημεία περνάει μία μοναδική ευθεία.

Σφαιρική Γεωμετρία

Από δύο σημεία περνάει μία ευθεία (μέγιστος κύκλος), εκτός αν τα σημεία είναι αντίποδες, οπότε από αυτά τα σημεία διέρχονται άπειρες ευθείες (μέγιστοι κύκλοι).





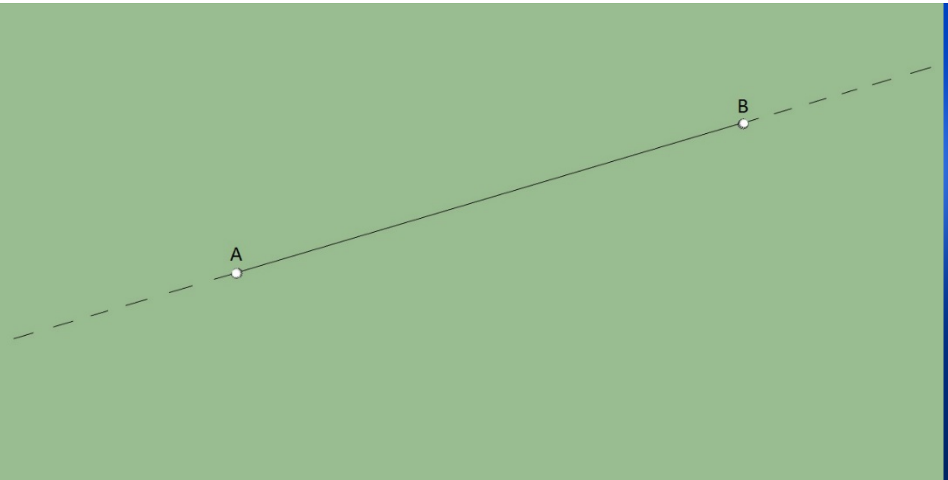
2ο Αξίωμα

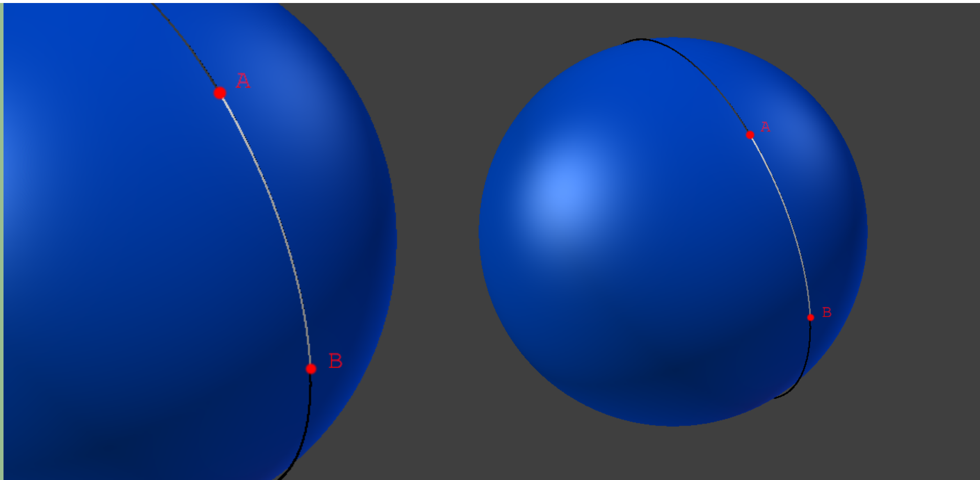
Ευκλείδεια Γεωμετρία

Κάθε πεπερασμένη ευθεία (τμήμα) μπορεί να επεκτείνεται συνεχώς και ευθυγράμμως.

Σφαιρική Γεωμετρία

Κάθε τμήμα (τόξο μέγιστου κύκλου) μπορεί να επεκταθεί μέχρι να γίνει μέγιστος κύκλος, άρα δεν μπορεί να επεκταθεί απεριόριστα.





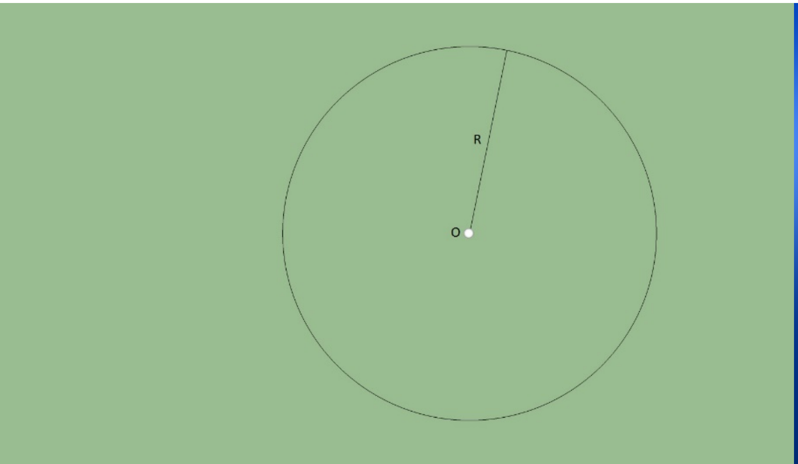
$3^{ο}$ Αξίωμα

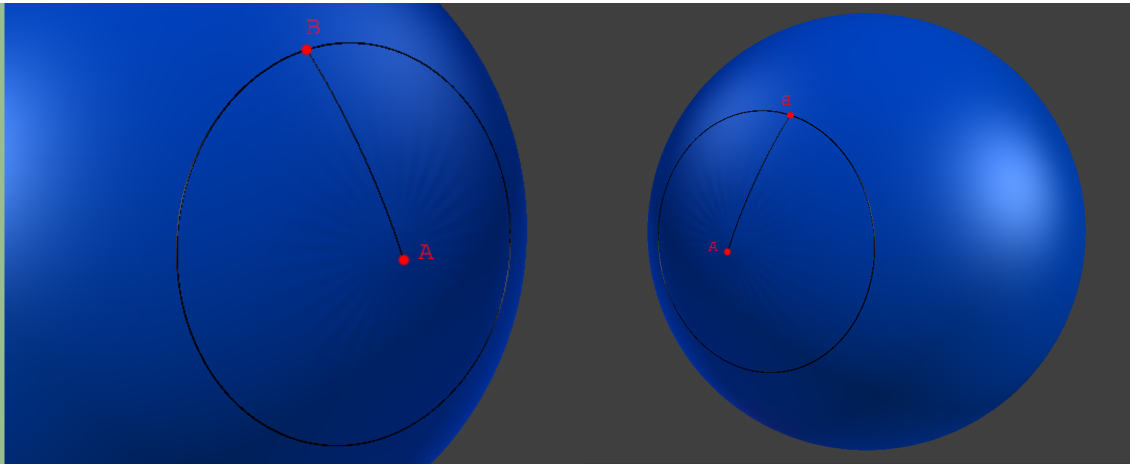
Ευκλείδεια Γεωμετρία

Με κάθε κέντρο και κάθε ακτίνα μπορεί να γραφεί κύκλος .

Σφαιρική Γεωμετρία

Με κάθε κέντρο και ακτίνα μικρότερη του μισού του μέγιστου κύκλου μπορεί να γραφεί κύκλος.

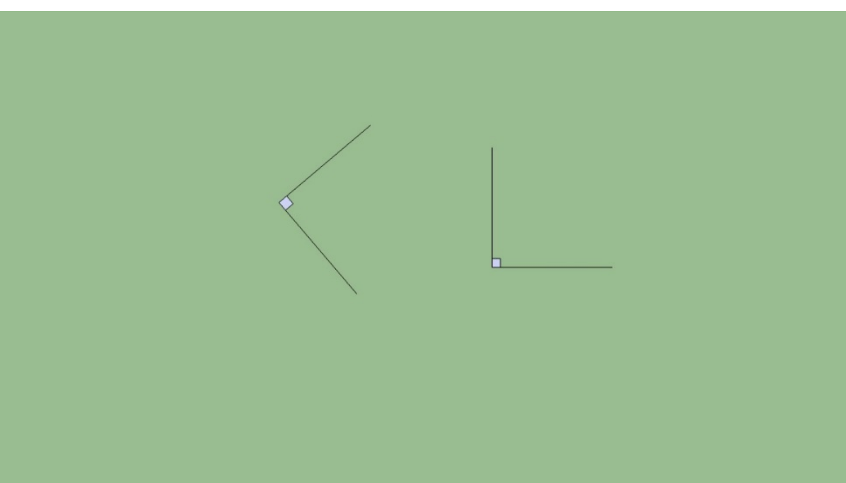




4^{o} ΑΞΙΩΜΑ

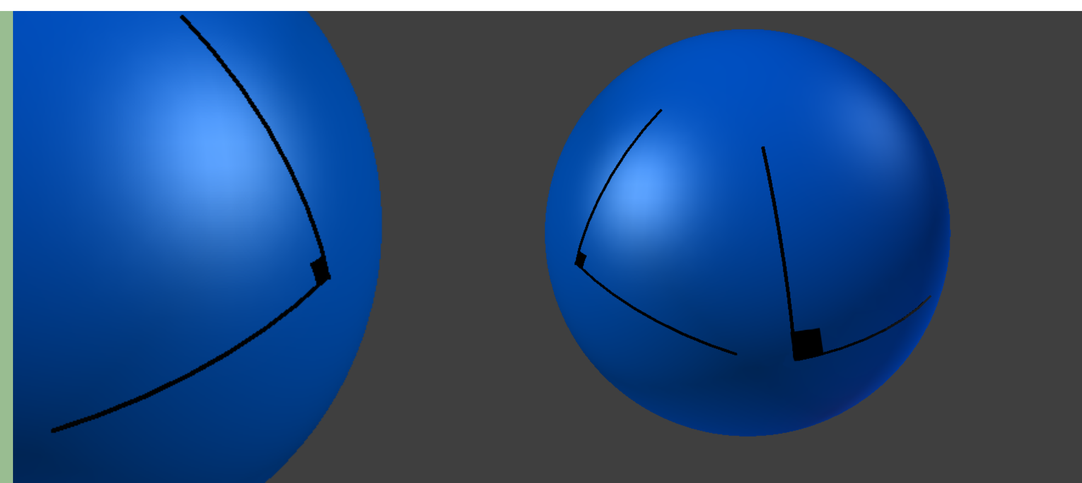
Ευκλείδεια Γεωμετρία

- Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.



Σφαιρική Γεωμετρία

- Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.



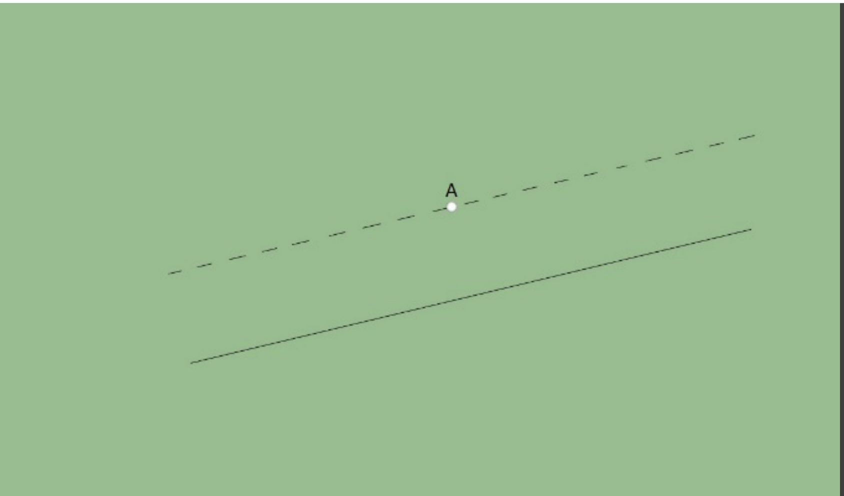
5^{o} ΑΞΙΩΜΑ

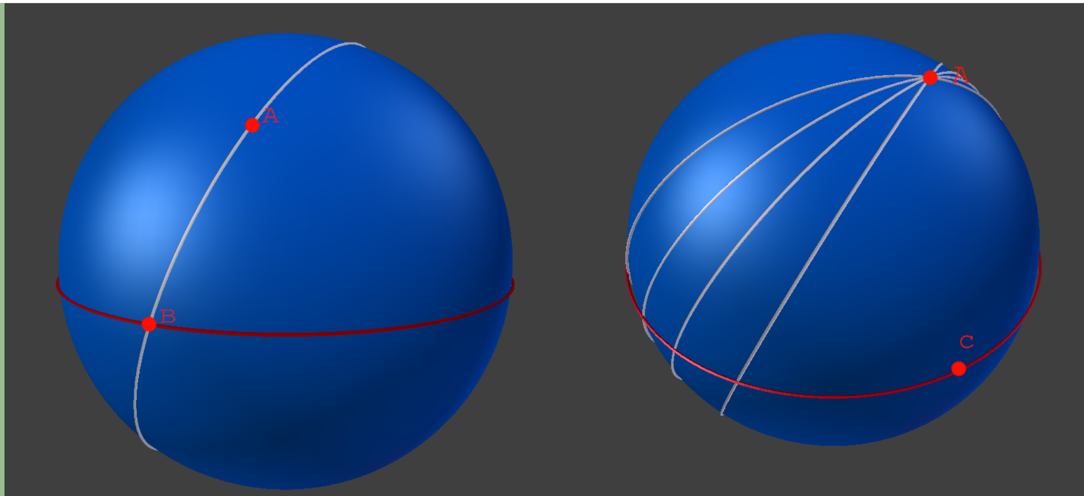
Ευκλείδεια Γεωμετρία

- Ισοδύναμο: Από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική παράλληλη προς την ευθεία.

Σφαιρική Γεωμετρία

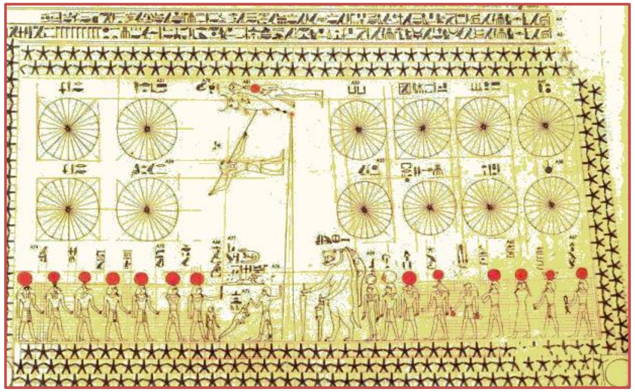
- Από σημείο εκτός ευθείας (μέγιστου κύκλου) δεν διέρχεται καμία παράλληλη.
- Δεν υπάρχουν παράλληλες ευθείες.





Μέτρηση κύκλου

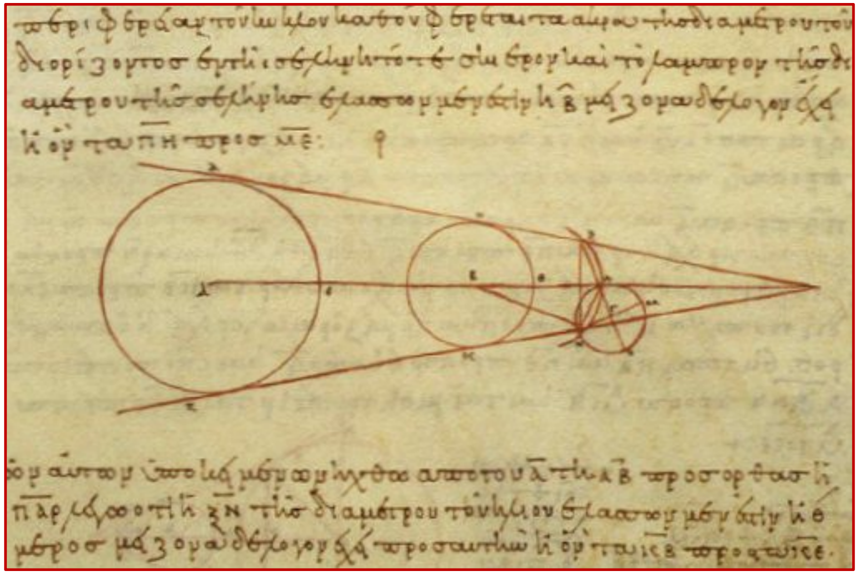
Βαβυλωνιακά μαθηματικά



Αιγυπτιακά μαθηματικά

Ελληνικά μαθηματικά

Θαλής
Αναξαγόρας
Δημόκριτος
Ιπποκράτης Χίος
Ιππίας
Εύδοξος
Αρχιμήδης



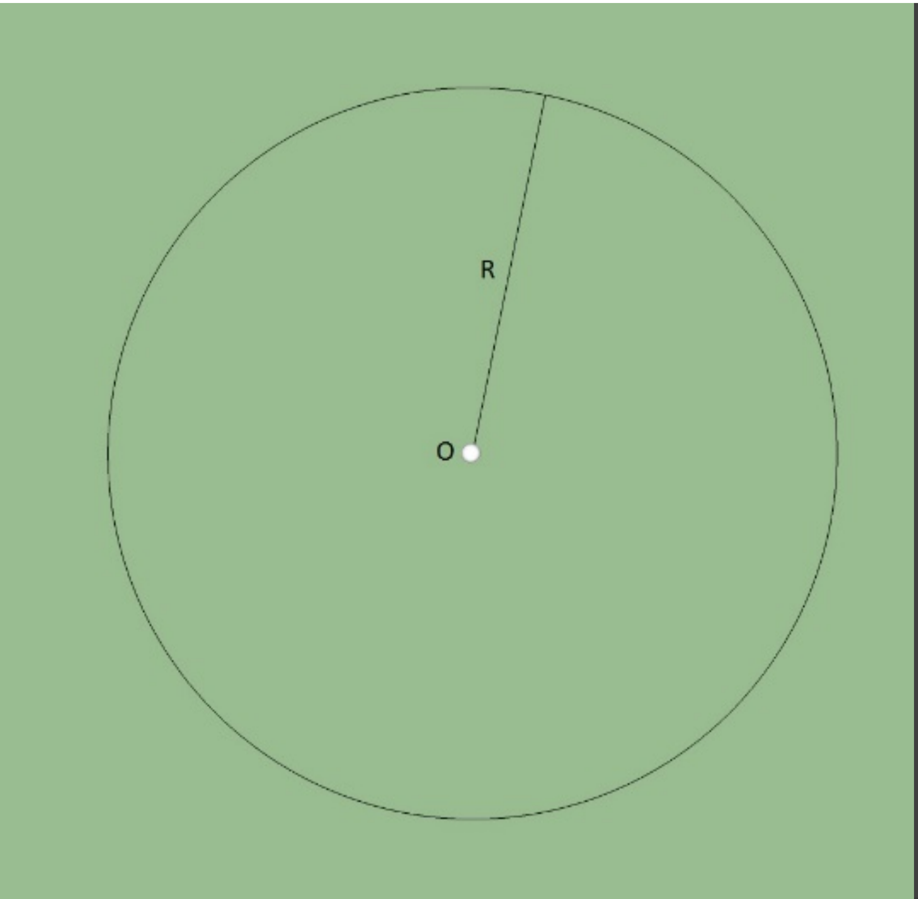
Μήκος κύκλου

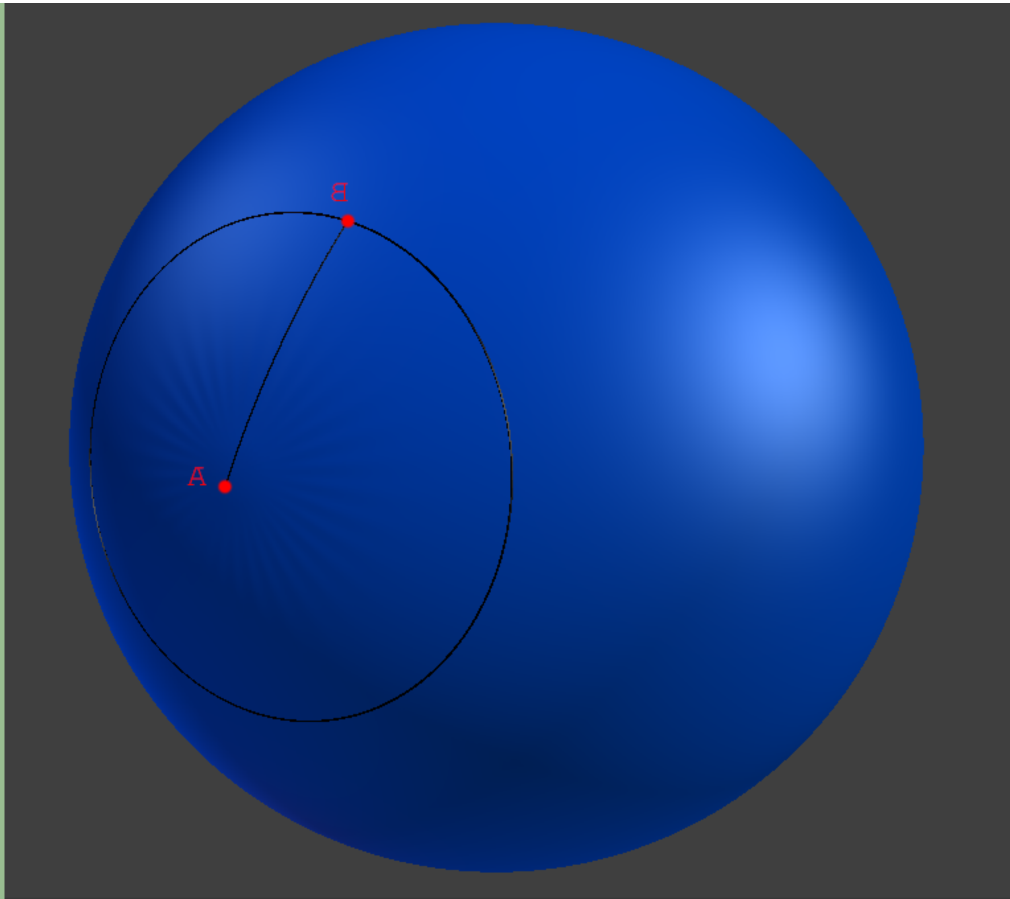
Ευκλείδεια γεωμετρία

$$L = 2\pi R$$

Σφαιρική γεωμετρία

$$L = ?$$





Μήκος κύκλου

Ευκλείδεια γεωμετρία

Κέντρο: Κ
Ακτίνα: τμήμα ΚΜ
$L = 2\pi \cdot KM$

Σφαιρική γεωμετρία

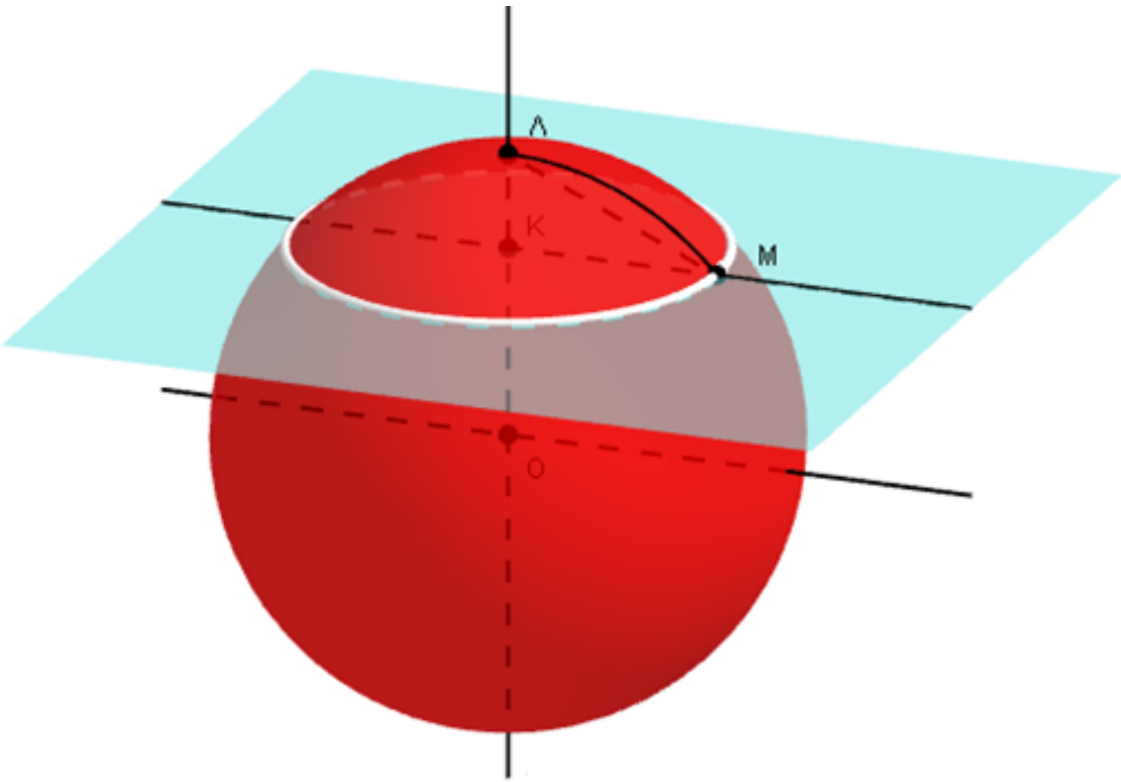
Κέντρο: Λ
Ακτίνα: τόξο ΛΜ
$\mathbf{L_{\sigma\varphi.} \overset{?}{=} 2\pi \cdot \text{τόξο } (\Lambda M)}$

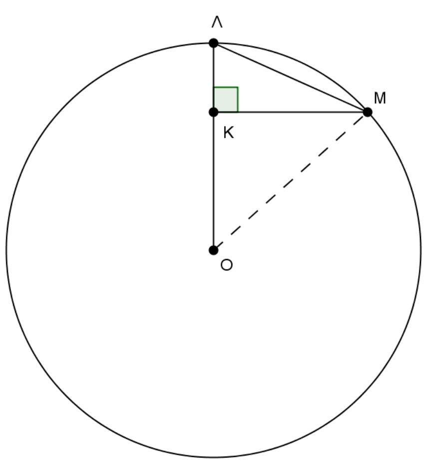
$\Lambda M < \text{τόξο}(\Lambda M)$ και $KM < \Lambda M$

$KM < \text{τόξο}(\Lambda M)$

$2\pi \cdot KM < 2\pi \cdot \text{τόξο}(\Lambda M)$

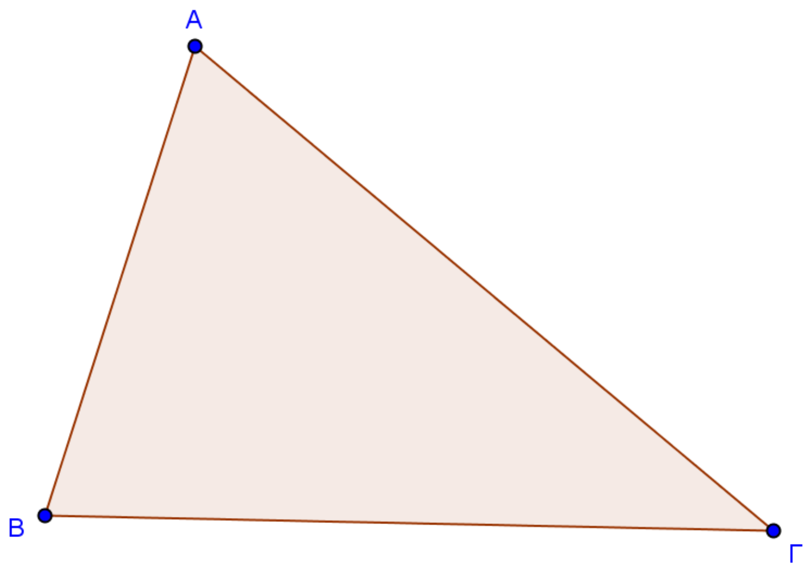
$\mathbf{L_{\sigma\varphi.} < 2\pi \cdot \text{τόξο}(\Lambda M)}$



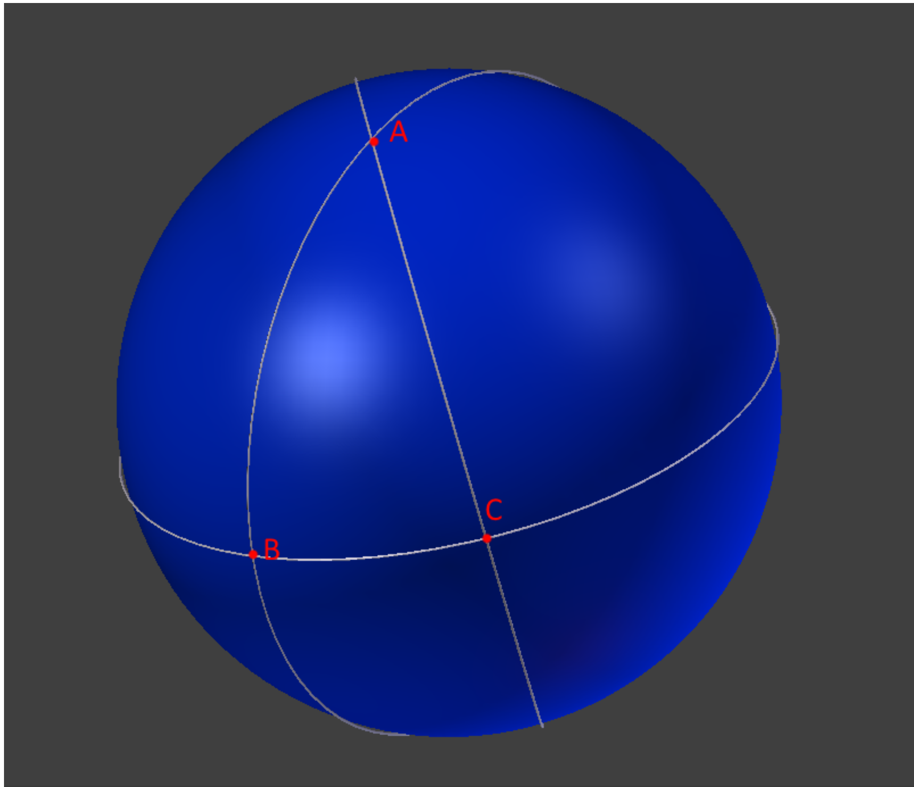


Πως κατασκευάζουμε τρίγωνα στη σφαιρική γεωμετρία;

Ευκλείδεια γεωμετρία



Σφαιρική γεωμετρία



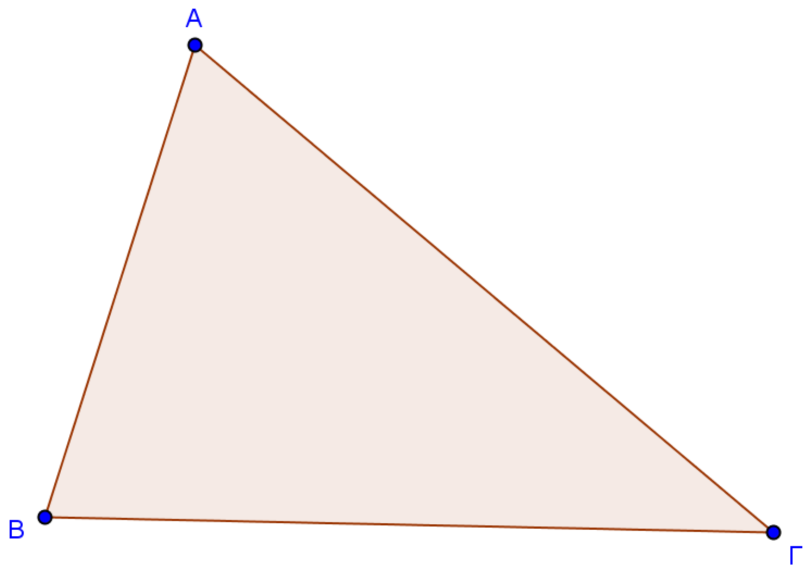
Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου

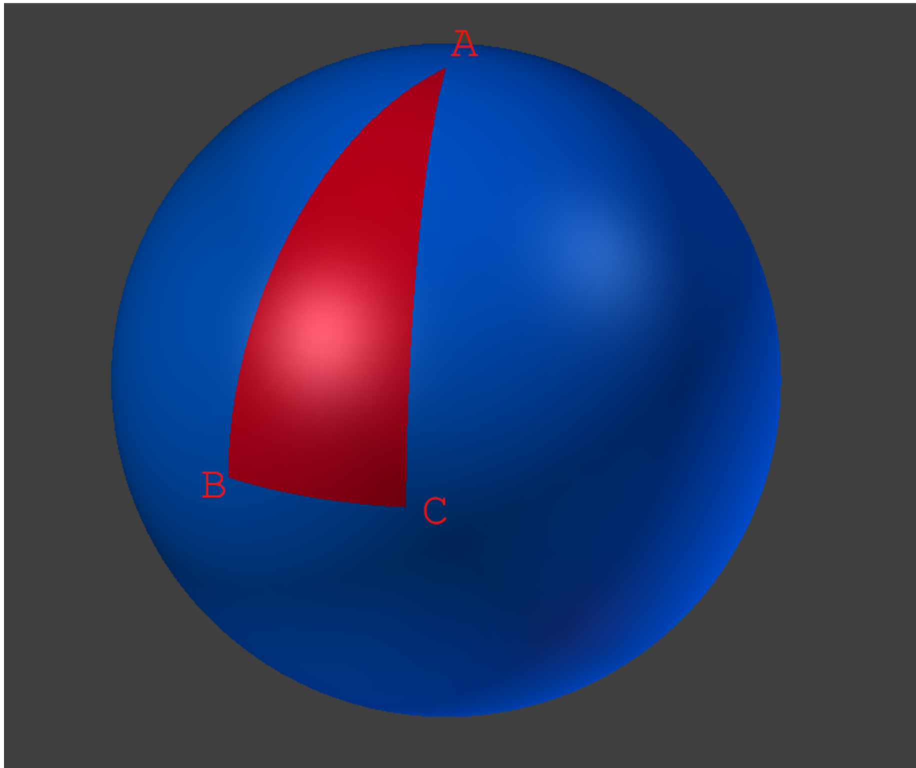
Ευκλείδεια γεωμετρία

$$A + B + \Gamma = \pi$$

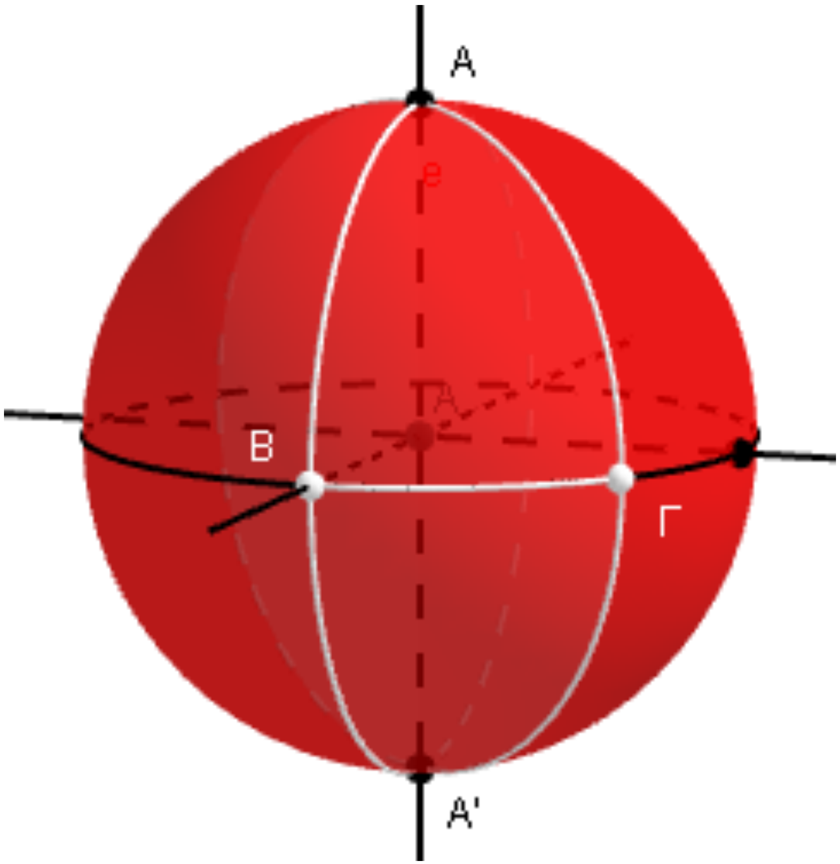
Σφαιρική γεωμετρία

$$A + B + \Gamma \stackrel{?}{=} \pi$$





Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου



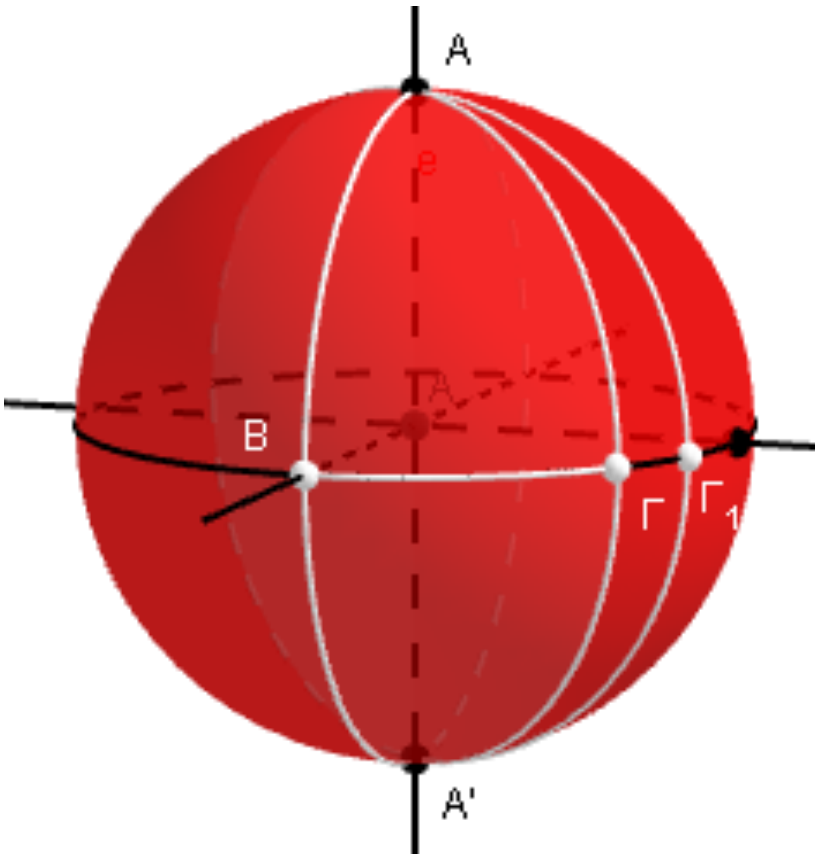
$$\mathrm{B} = \Gamma = \frac{\pi}{2} \text{ ή } 90^{o}$$

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} + \Gamma = \mathrm{A} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$
$$\mathrm{A} + \mathrm{B} + \Gamma = \mathrm{A} + \pi$$

Στη σφαιρική γεωμετρία υπάρχει τρίγωνο στο οποίο:

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} + \Gamma > \pi \text{ ή } 180^{o}$$

Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου



$$B = \Gamma = \frac{\pi}{2} \text{ ή } 90^{o}$$

$$A + B + \Gamma = A + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$
$$A + B + \Gamma = A + \pi$$

Στη σφαιρική γεωμετρία υπάρχει τρίγωνο στο οποίο:

$$A + B + \Gamma > \pi \text{ ή } 180^{o}$$

& επιπλέον
$A + B + \Gamma$ δεν είναι σταθερό

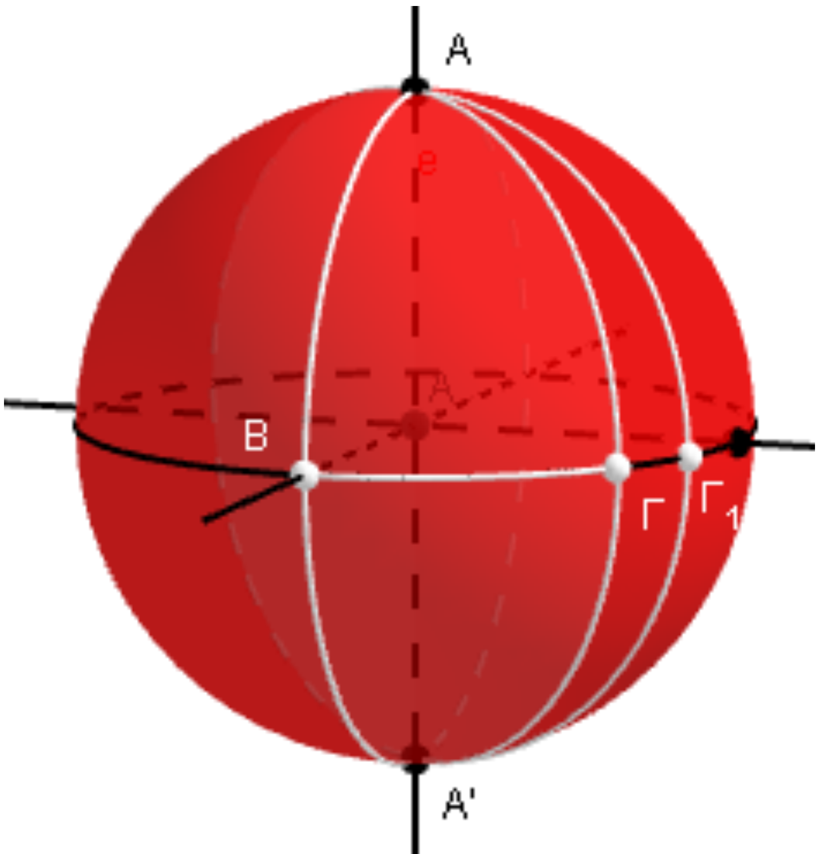
Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου

Ισχύει όμως το συμπέρασμα:

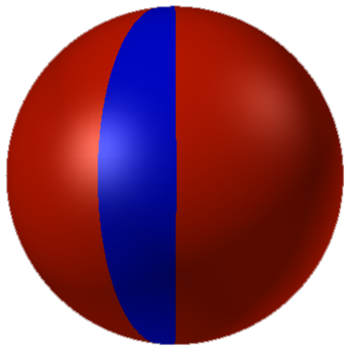
$A + B + \Gamma > \pi$ ή 180^o

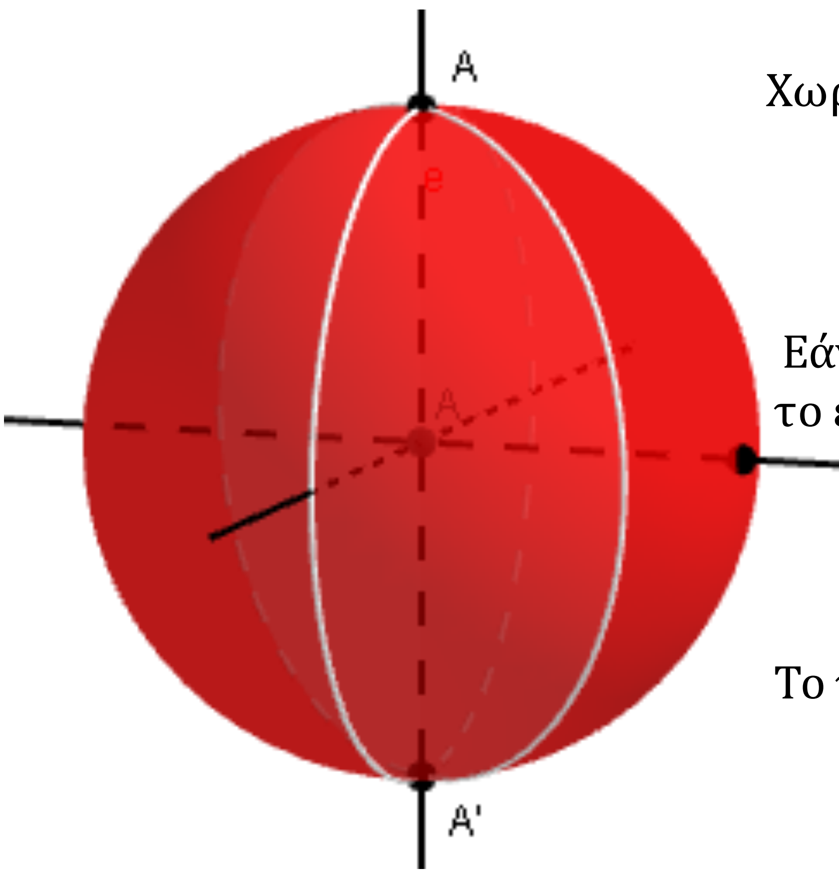
για όλα τα σφαιρικά τρίγωνα;

Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα έρχεται μέσα από τον υπολογισμό του εμβαδού του σφαιρικού τριγώνου.



Υπολογισμός του εμβαδού της ατράκτου





Θα υπολογίσουμε πρώτα το εμβαδό της ατράκτου αναλογικά προς το εμβαδό της σφαίρας.

$$E_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma} = 4\pi R^2$$
$$E_{\eta\mu\iota\sigma\varphi\alpha\iota\rho\acute{\iota}o\upsilon} = 2\pi R^2$$

Χωρίζουμε το ημισφαίριο σε κ ίσες ατράκτους. Το εμβαδό κάθε μιας από αυτές θα είναι:

$$E_{\kappa\text{-}\alpha\tau\rho\acute{\alpha}\kappa\tau o\upsilon} = \frac{2\pi R^2}{\kappa}$$

Εάν πάρουμε λ τέτοιες στοιχειώδεις ατράκτους, το εμβαδό της ατράκτου που σχηματίζεται είναι:

$$E_{\alpha\tau\rho\acute{\alpha}\kappa\tau o\upsilon} = \lambda \cdot \frac{2\pi R^2}{\kappa} = \frac{2\pi\lambda R^2}{\kappa}$$

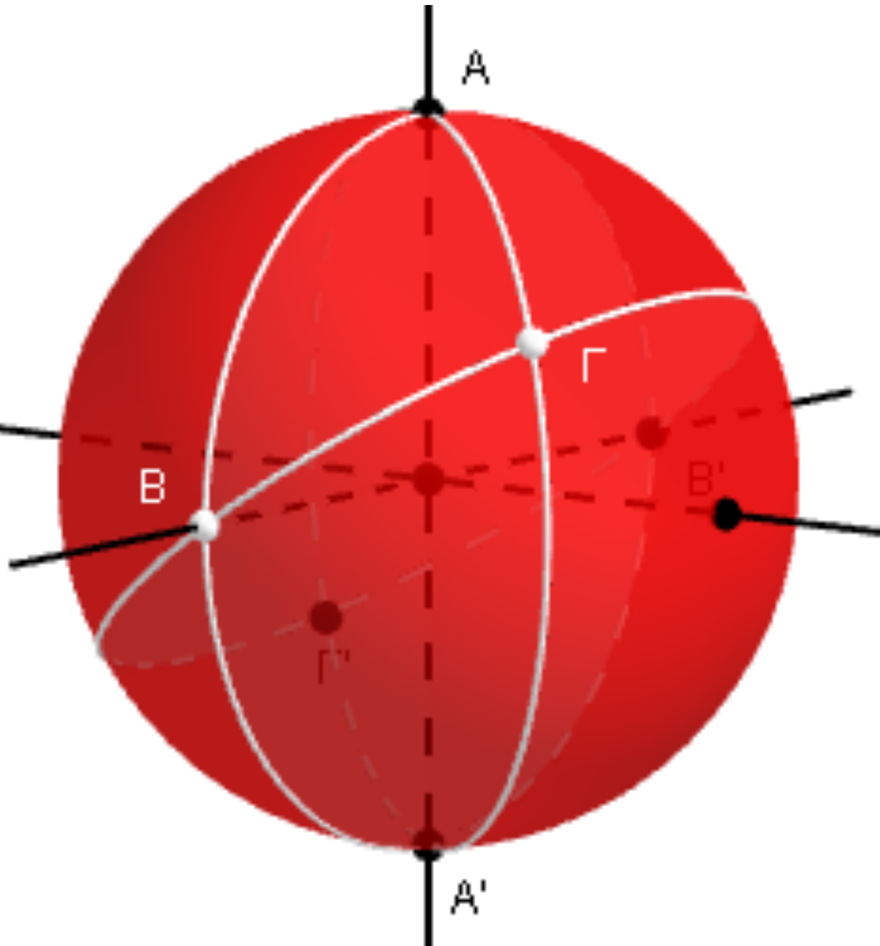
Το πηλίκο $\frac{\pi\lambda}{\kappa}$ εκφράζει τη γωνία Α της ατράκτου, οπότε το εμβαδό της ατράκτου θα είναι:

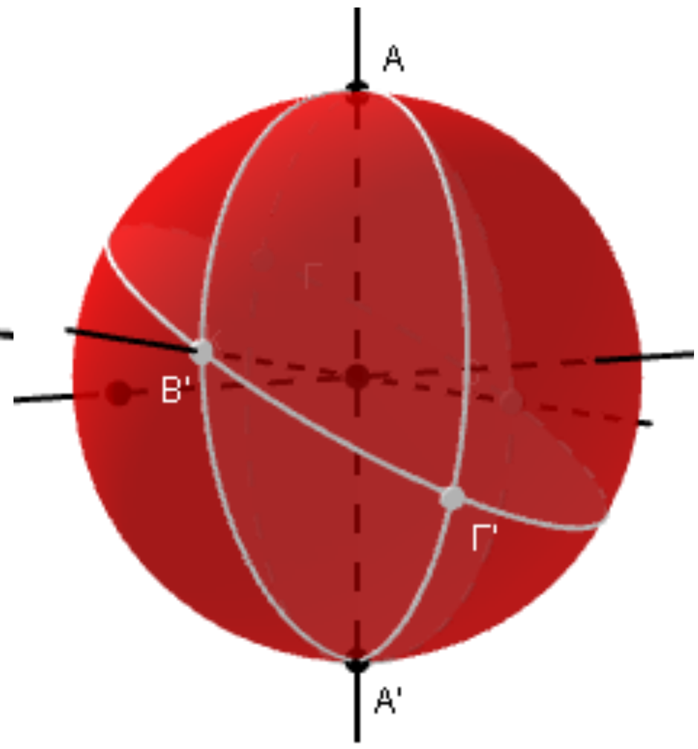
$$E_{\alpha\tau\rho\acute{\alpha}\kappa\tau o\upsilon} = 2R^2 A$$

Υπολογισμός του εμβαδού του σφαιρικού τριγώνου

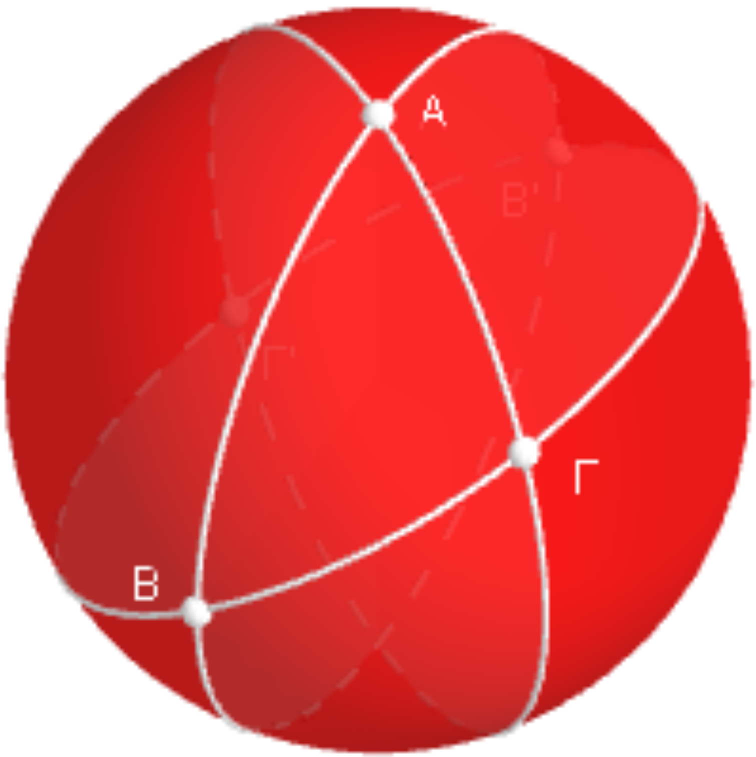
Για να σχηματιστεί το σφαιρικό τρίγωνο, φτιάχνουμε και έναν τρίτο μέγιστο κύκλο που τέμνει τους άλλους δύο στα σημεία Β, Γ, Β΄ και Γ΄.

Έτσι, σχηματίζεται το σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ και το τρίγωνο-αντίποδας Α΄Β΄Γ΄ που είναι ίσο με το ΑΒΓ.





Υπολογισμός του εμβαδού του σφαιρικού τριγώνου



Το σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ περιέχεται σε τρεις ατράκτους, τις L_A, L_B και L_Γ

Αντίστοιχα, το τρίγωνο Α'Β'Γ' περιέχεται σε τρεις ατράκτους, τις $L_{A'}$, $L_{B'}$ και $L_{\Gamma'}$

Κάθε σημείο της σφαίρας που δεν ανήκει στο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ ή στο σφαιρικό τρίγωνο Α'Β'Γ', ανήκει σε μία μόνο άτρακτο.

Οι έξι άτρακτοι L_A, L_B, L_Γ, $L_{A'}$, $L_{B'}$ και $L_{\Gamma'}$ καλύπτουν όλη την επιφάνεια της σφαίρας, έχοντας καλύψει από τρεις φορές καθένα από τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ', δηλαδή θα ισχύει:

Υπολογισμός του εμβαδού του σφαιρικού τριγώνου

$$L_A + L_B + L_\Gamma + L_{A'} + L_{B'} + L_{\Gamma'} = E_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma} + 2(AB\Gamma) + 2(A'B'\Gamma')$$

$$2L_A + 2L_B + 2L_\Gamma = E_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma} + 4(AB\Gamma)$$

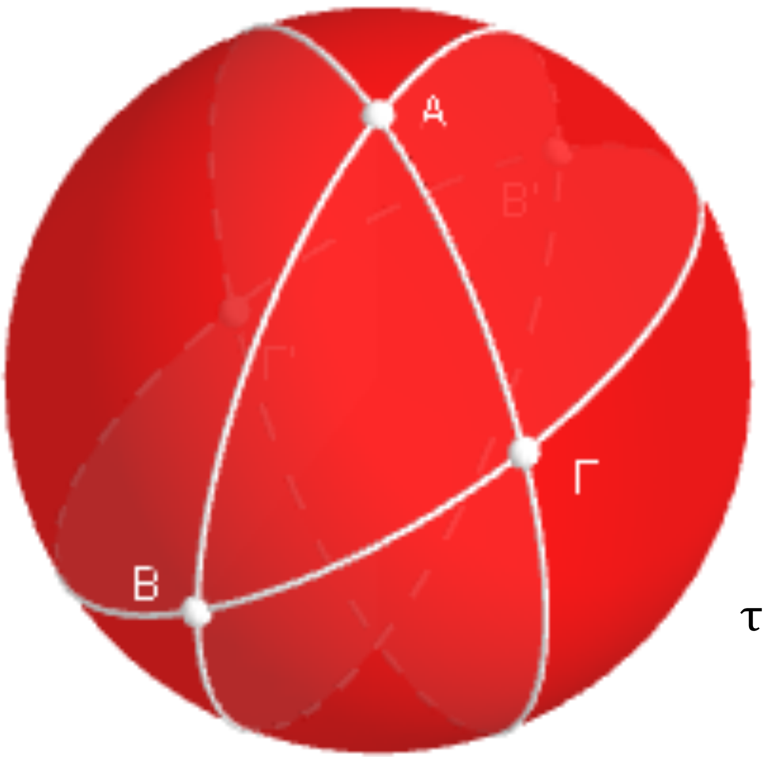
$$2\cdot 2R^2A + 2\cdot 2R^2B + 2\cdot 2R^2\Gamma = 4\pi R^2 + 4(AB\Gamma)$$

$$4R^2A + 4R^2B + 4R^2\Gamma = 4\pi R^2 + 4(AB\Gamma)$$

$$R^2A + R^2B + R^2\Gamma = \pi R^2 + (AB\Gamma)$$

$$(AB\Gamma) = R^2A + R^2B + R^2\Gamma - \pi R^2$$

$$(AB\Gamma) = R^2\,(A + B + \Gamma - \pi)$$



Αν λύσουμε αυτή τη σχέση ως προς
το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ...

Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου

$$L_A + L_B + L_\Gamma + L_{A'} + L_{B'} + L_{\Gamma'} = E_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma} + 2(AB\Gamma) + 2(A'B'\Gamma')$$

$$2L_A + 2L_B + 2L_G = E_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma} + 4(AB\Gamma)$$

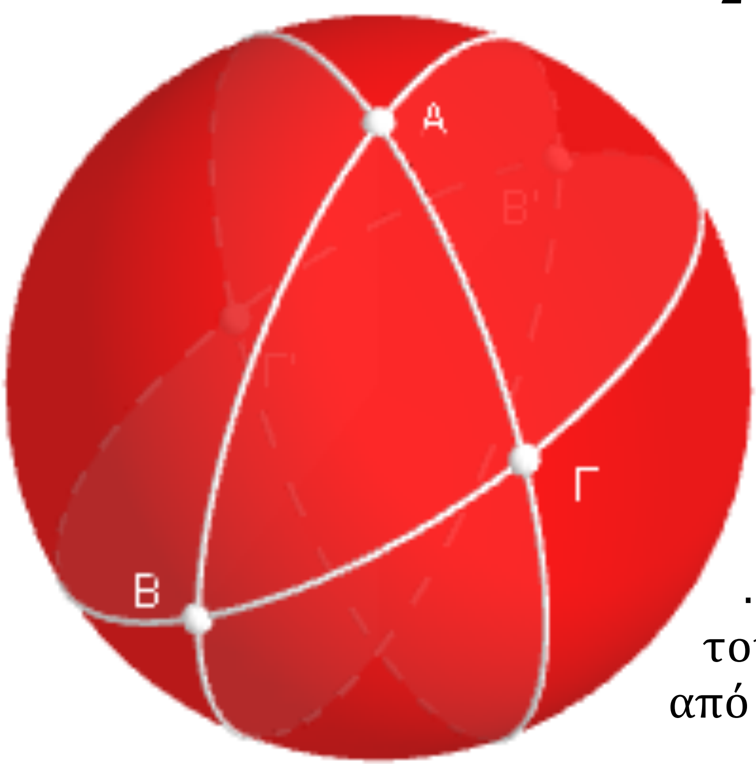
$$2\cdot 2R^2A + 2\cdot 2R^2B + 2\cdot 2R^2\Gamma = 4\pi R^2 + 4(AB\Gamma)$$

$$4R^2A + 4R^2B + 4R^2\Gamma = 4\pi R^2 + 4(AB\Gamma)$$

$$R^2A + R^2B + R^2\Gamma = \pi R^2 + (AB\Gamma)$$

$$R^2\,(A + B + \Gamma) = \pi R^2 + (AB\Gamma)$$

$$A + B + \Gamma = \pi + \frac{1}{R^2}\,(AB\Gamma)$$

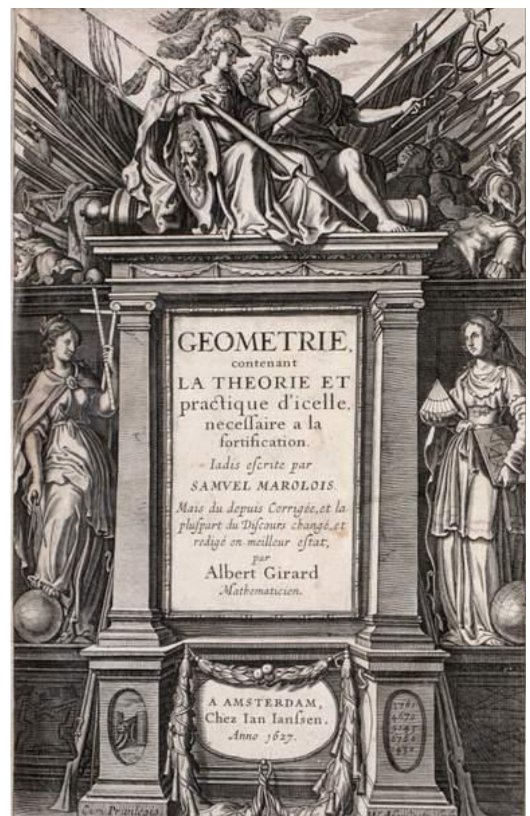


… διαπιστώνουμε ότι το άθροισμα των γωνιών του σφαιρικού τριγώνου είναι πάντα μεγαλύτερο από το π και μάλιστα είναι τόσο μεγαλύτερο όσο μεγαλύτερο είναι το εμβαδό του.

Το θεώρημα του Girard

$$(AB\Gamma) = R^2\,(A + B + \Gamma - \pi)$$

Το θεώρημα αυτό, γνωστό ως θεώρημα του Girard, δημοσιεύτηκε από τον Albert Girard το 1626.

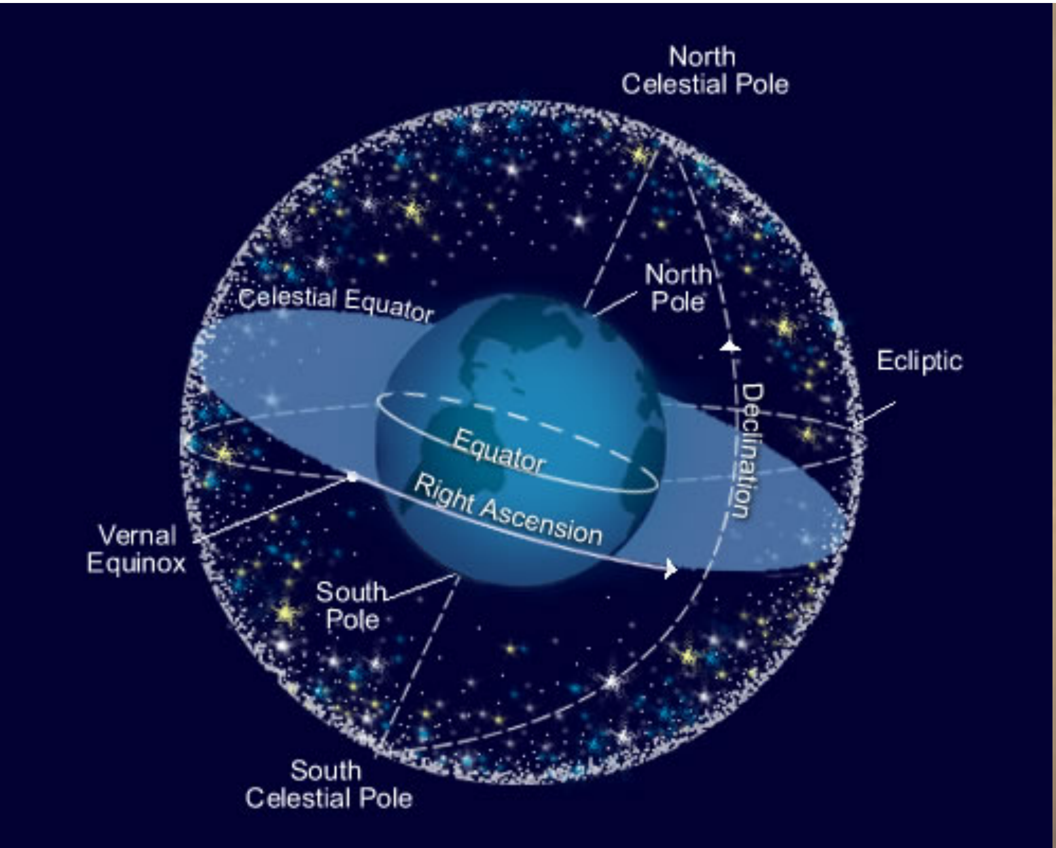

GEOMETRIE,
contenant
LA THEORIE ET
practique d'icelle,
necessaire a la
fortification.
Iadis escrite par
SAMVEL MAROLOIS.
Mais du depuis Corrigée, et la
plusfpart du Discours changé, et
redigé en meilleur estat,
par
Albert Girard
Mathematicien.

A AMSTERDAM,
Chez Ian Ianssen.
Anno 1627.

Γιατί σφαιρική γεωμετρία;

Η αστρονομία

Ο ουράνιος θόλος

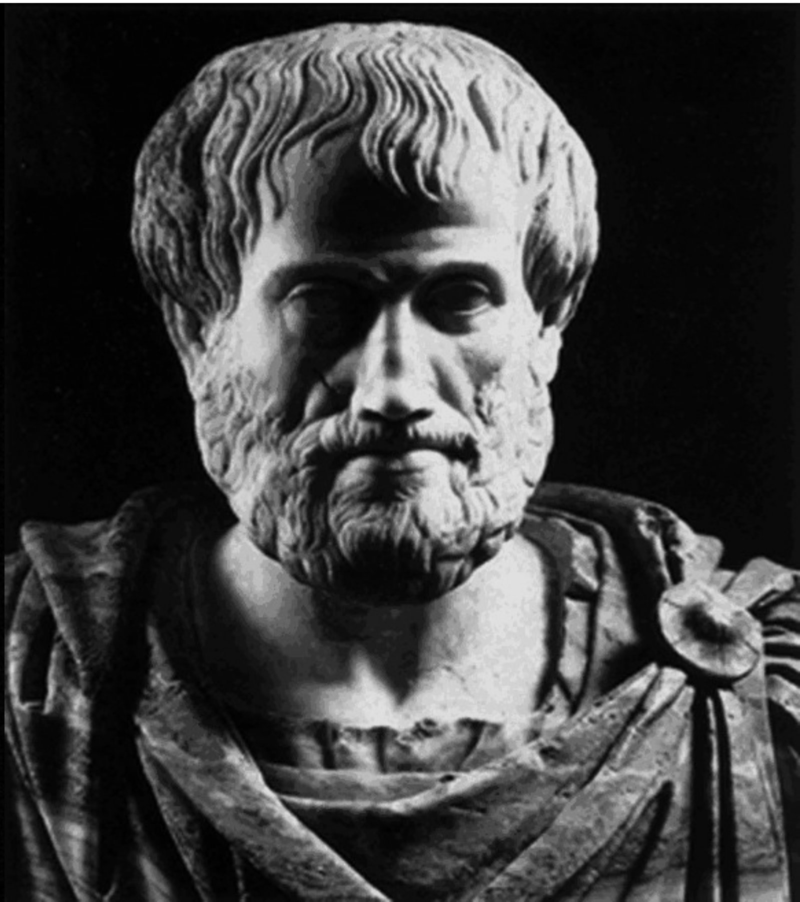


Η ουράνια σφαίρα στην εποχή του Ομήρου 8ος αιώνας π.Χ.

Γιατί σφαιρική γεωμετρία;

Η Γεωδεσία

Η γη είναι σφαιρική



Γιατί σφαιρική γεωμετρία;

Η Γεωδεσία

Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι:
και οι πλημμύρες του Νείλου

Οι αρχαίοι Έλληνες:
Γεωδετικά σημεία
σε ναούς, βωμούς, ιερά.

Ο ομφαλός της γης.
Το αρχαιότερο ανάγλυφο γεωδετικό δίκτυο, στο Αρχαιολογικό Μουσείο των Δελφών.

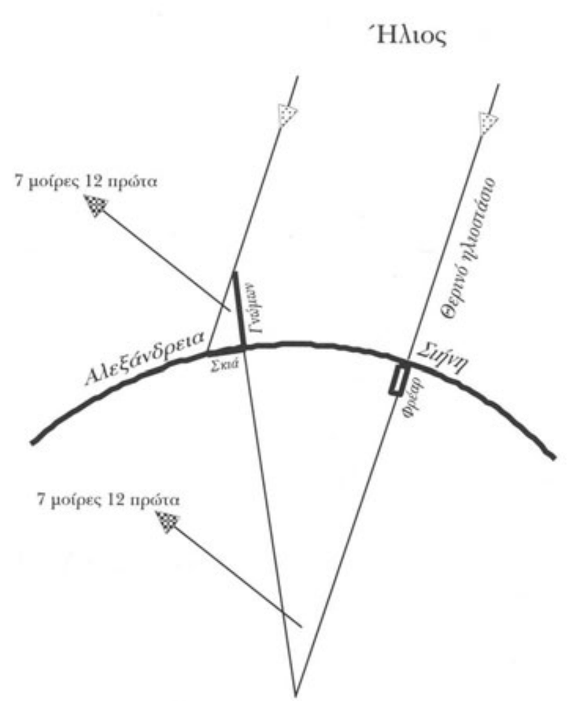
Γιατί σφαιρική γεωμετρία;

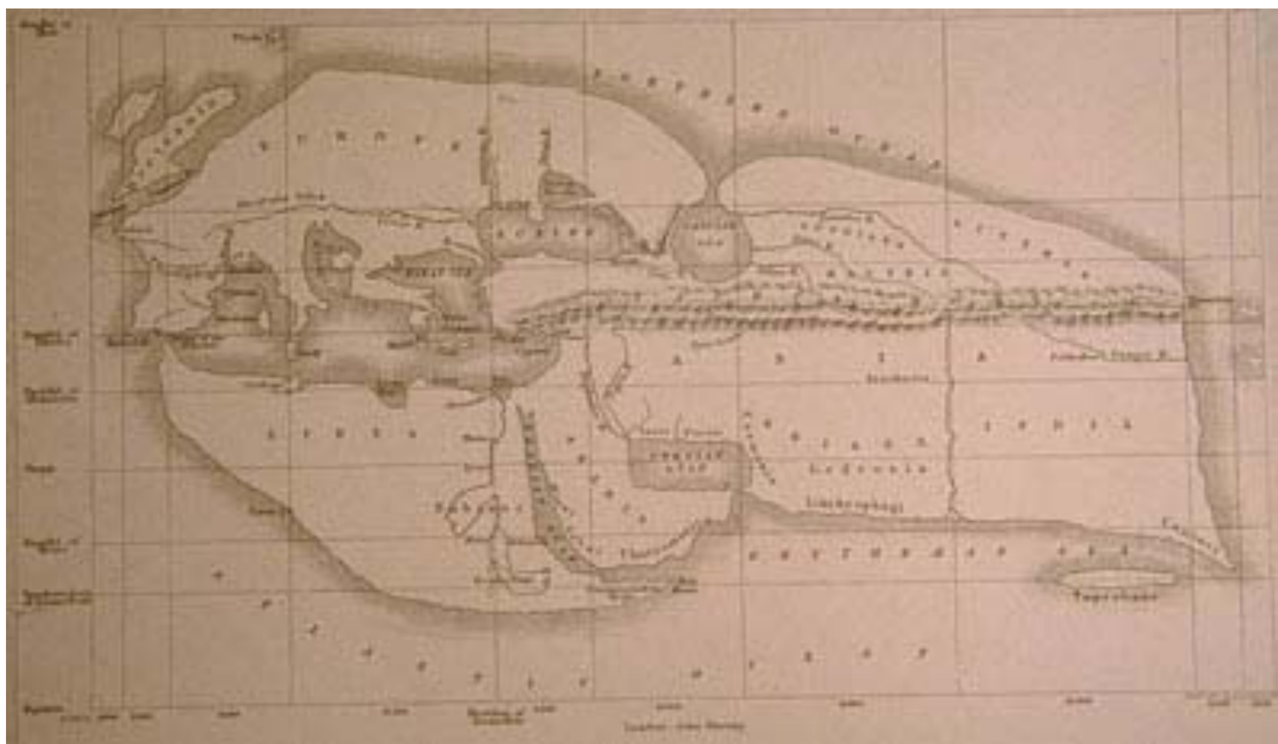
Η Γεωδεσία

Ερατοσθένης, ο πατέρας
και ιδρυτής της γεωδεσίας.

Η χαρτογραφία

Ο χάρτης του Ερατοσθένη
σε κάναβο επτά μεσημβρινών και επτά παραλλήλων, αποτελεί την πρώτη απόπειρα δημιουργίας ενός συστήματος αναφοράς





Γιατί σφαιρική γεωμετρία;

Η Γεωδεσία

Ο Πτολεμαίος.
Η Μαθηματική Σύνταξις ή Μεγίστη

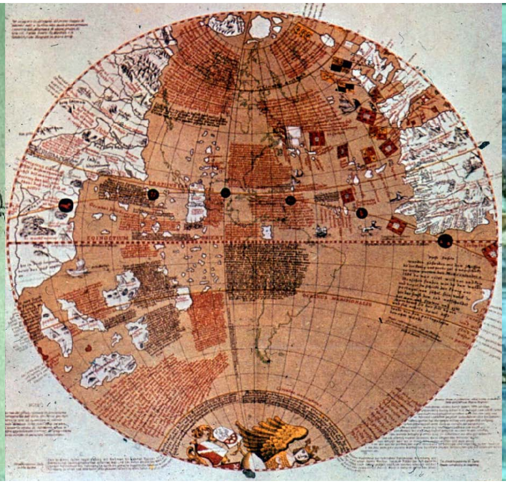
Η χαρτογραφία

Στον χάρτη του φαίνεται η προσπάθεια αποτύπωσης της σφαιρικότητας της γης.

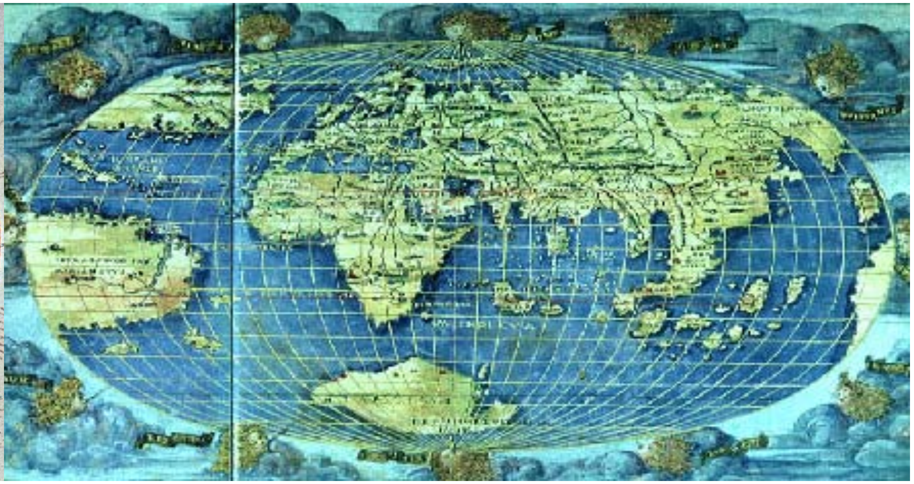
Γιατί σφαιρική γεωμετρία;

Al-Idrisi, 12ος αι.

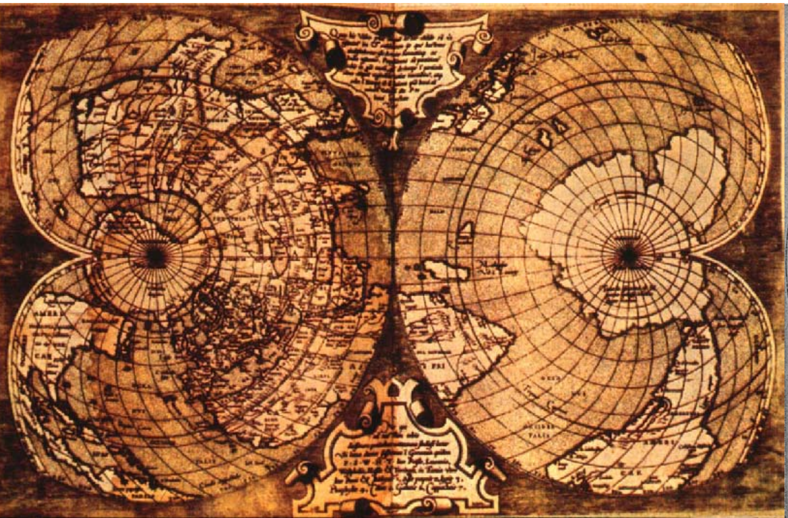
Μπάιχαϊμ (1492) πριν την ανακάλυψη της Αμερικής



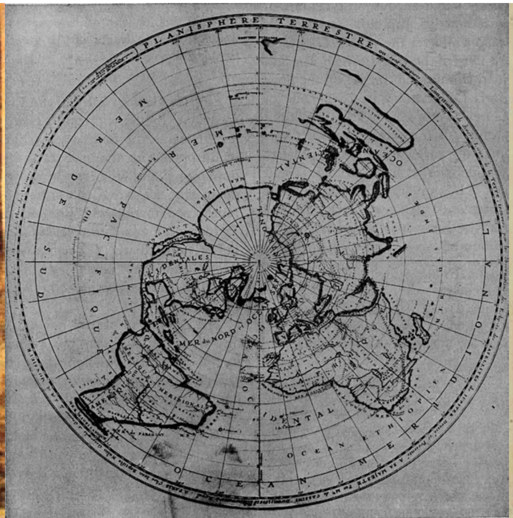
Frencesco Rosselli (1508). Ο πρώτος χάρτης που απεικονίζει όλη την υδρόγειο



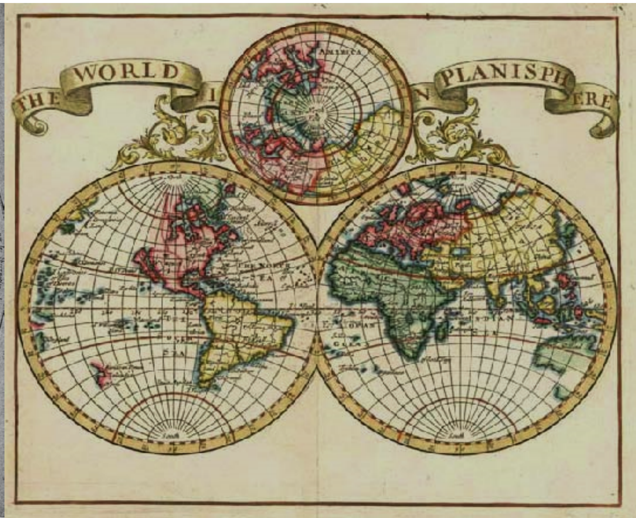
Mercator (1538)



Cassini, 1682



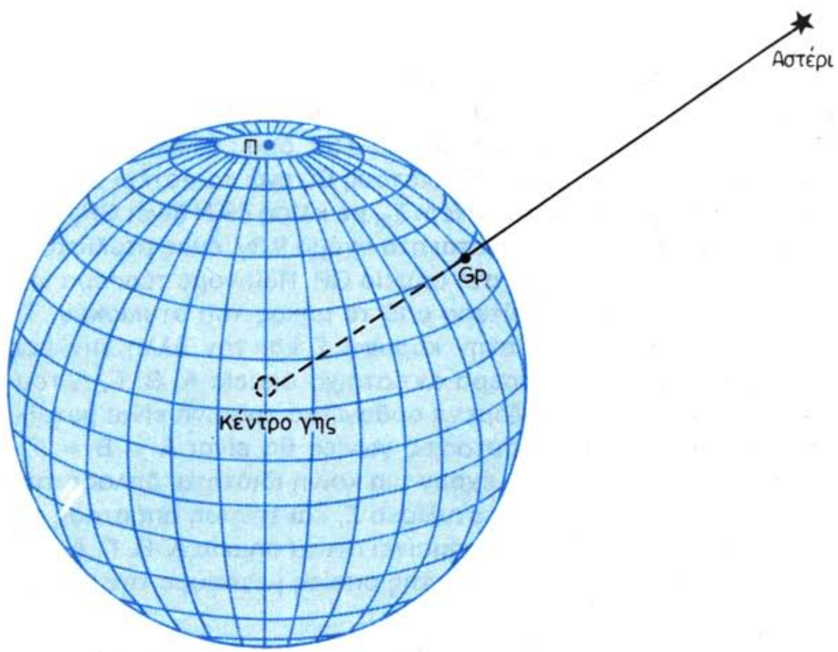
Herman Moll, 1709



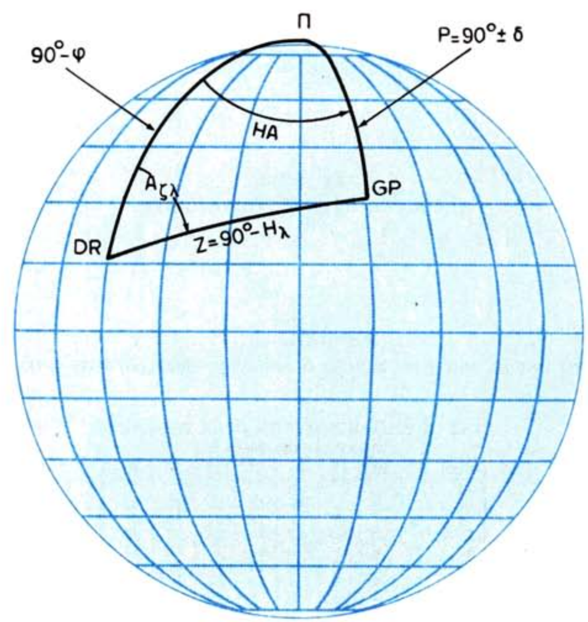
Γιατί σφαιρική γεωμετρία;

Ναυσιπλοΐα – Ωκεανοπλοΐα

Ο προσδιορισμός του τριγώνου θέσεως με τη βοήθεια της γεωγραφικής θέσης (γήινης προβολής) ουράνιου σώματος.



Σχ. 9.3α.
Γεωγραφική θέση GP (geographical position) ή γήινη προβολή ουράνιου σώματος



Σχ. 9.2α.
Τρίγωνο θέσεως DR-Π-GP. Γωνία Π-DR-GP = $A\zeta_\lambda$. Δίδονται δυο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία (HA).

Γιατί σφαιρική γεωμετρία;

Αεροπλοΐα

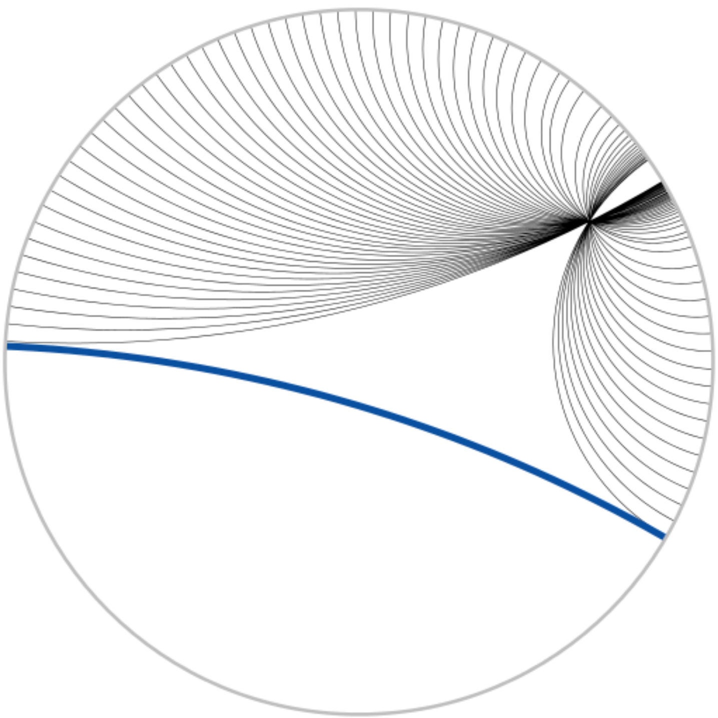
Τα αεροπλάνα κινούνται πάνω σε μέγιστους κύκλους.

Γιατί σφαιρική γεωμετρία;

Μη ευκλείδειες γεωμετρίες

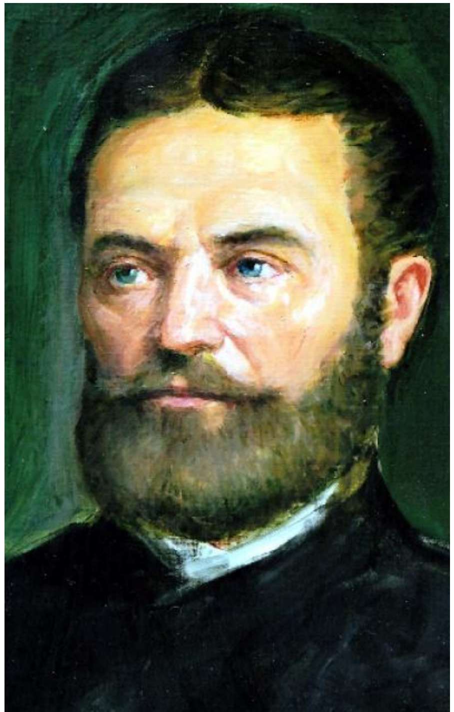
Υπερβολική γεωμετρία

Από ένα σημείο εκτός ευθείας διέρχονται άπειρες παράλληλες στην ευθεία



Ο Ρώσος μαθηματικός Nikolai Lobachevsky

Ο Ούγγρος μαθηματικός János Bolyai



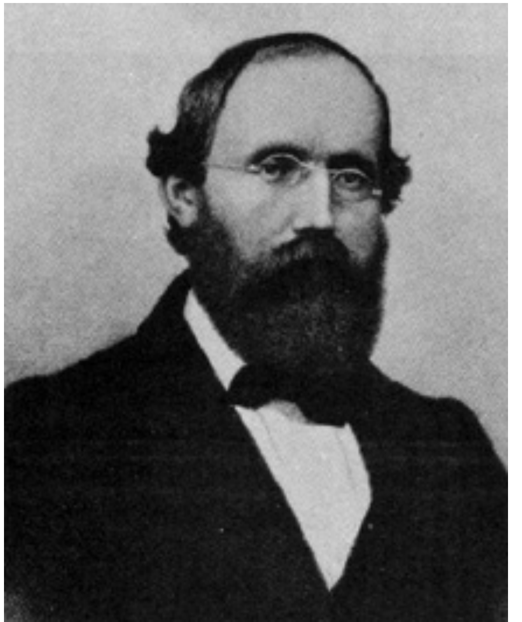
Γιατί σφαιρική γεωμετρία;

Μη ευκλείδειες γεωμετρίες

Ελλειπτική γεωμετρία

Από ένα σημείο εκτός ευθείας δεν διέρχεται καμία παράλληλη στην ευθεία

Ο Γερμανός μαθηματικός Bernhard Riemann



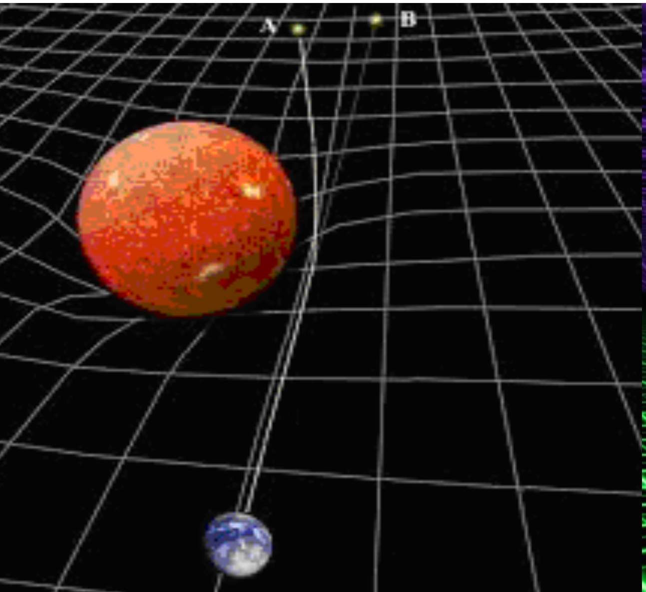
Ο Γερμανός μαθηματικός Carl Friedrich Gauss

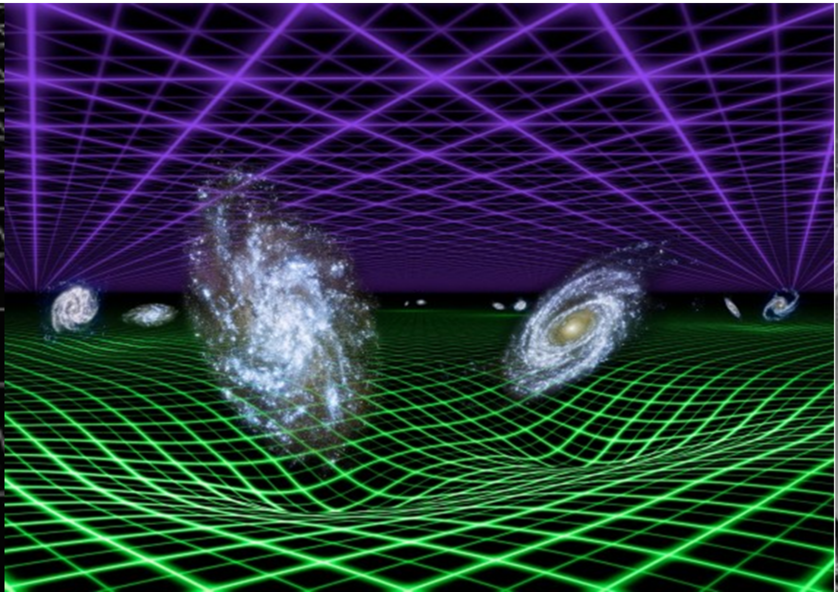
Γιατί σφαιρική γεωμετρία;

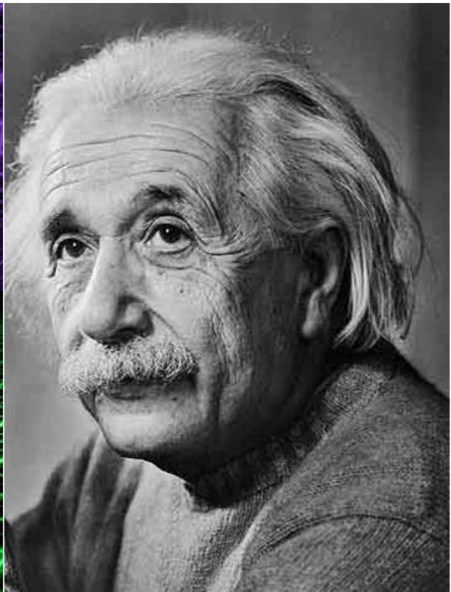
Μη ευκλείδειες γεωμετρίες

Η θεωρία της σχετικότητας

Η καμπύλωση του χωροχρόνου και η ανάγκη για μία ελλειπτική γεωμετρία.







Albert Einstein

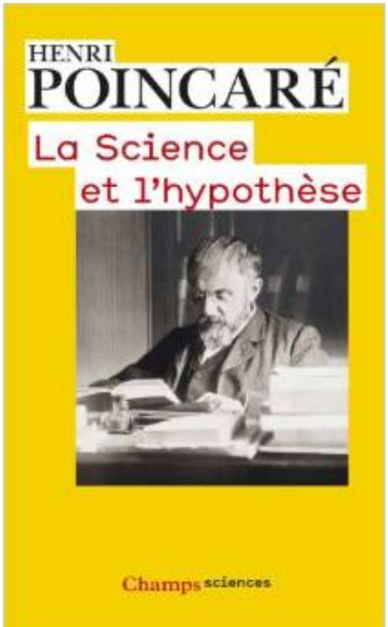
Συμπέρασμα

Οι μαθηματικές αλήθειες δεν είναι οριστικές και αμετάβλητες, είναι **δυναμικές** και **εξελίσσονται** καθώς αναπτύσσονται τα μαθηματικά μέσα από **εσωτερικές διεργασίες** της ίδιας της μαθηματικής επιστήμης αλλά και από **εξωτερικές επιρροές**, από ανάγκες και προβλήματα που θέτει η κοινωνία στην επιστήμη.

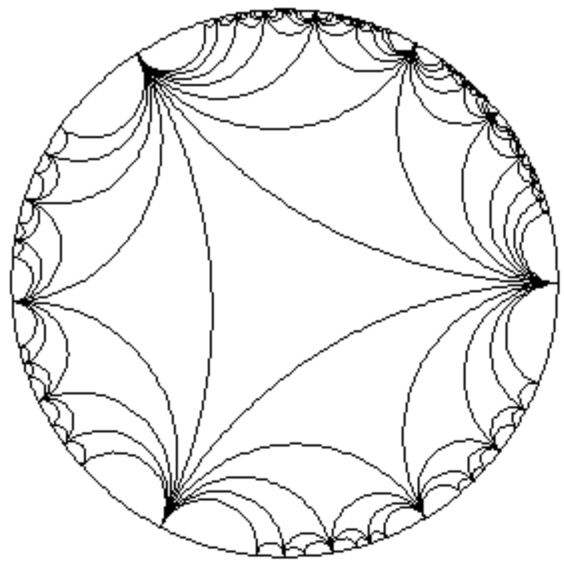
Ποια γεωμετρία είναι αληθινή;

Το ερώτημα αν η Ευκλείδεια γεωμετρία είναι αληθής, δεν έχει νόημα.
Μία γεωμετρία δεν μπορεί να είναι περισσότερο **αληθής** από μία άλλη.
Μπορεί μόνον να είναι περισσότερο **βολική**.

La science et l'hypothèse, Paris, 1902
(Επιστήμη και υπόθεση)



Ευχαριστούμε πολύ!



Ο σχεδιασμός των γραφικών έγινε στα λογισμικά Geogebra και …